<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>
<u>ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2003</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 304

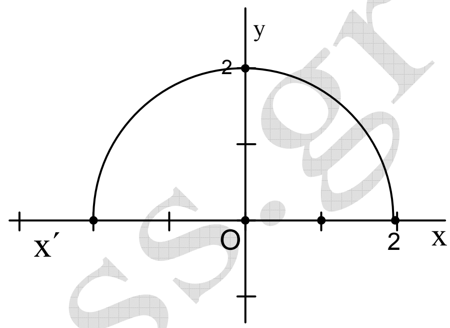
Β. α. Σ , β. Λ , γ. Λ , δ. Σ

Γ. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 279

ΘΕΜΑ 2ο

α.

Είναι το σύνολο των σημείων του ημικυκλίου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, το οποίο ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο ως προς τον άξονα x΄x.



β.

$|z| = 2 \iff |z|^2 = 4 \iff z\overline{z} = 4 \iff \overline{z} = \frac{4}{z}$

Οπότε $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\, 2\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z)$

Αν λοιπόν $z = x + yi$ τότε $w = x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στον άξονα x΄x.

Από το ερώτημα (α) προφανώς ισχύει $-2 \le x \le 2$

Συνεπώς η εικόνα του w κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα του άξονα των x με άκρα τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

β.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = -2$$

Οπότε $\lambda = -2$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - \lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x + 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

Συνεπώς $\beta = 0$

Άρα η ευθεία $y = -2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

γ.

Είναι $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

Οπότε

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= x - \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} - x = 0$$

δ.

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Σημείωση : Είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι αν για κάποιο x ήταν $f(x) = 0$ τότε $\sqrt{x^2+1} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x^2+1 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$ αδύνατο

Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{-f'(x)}{f(x)}dx = -\left[\ln|f(x)|\right]_0^1$$

$$= -\ln f(1) + \ln f(0)$$

$$= -\ln(\sqrt{2} - 1)$$

$$= \ln(\sqrt{2} - 1)^{-1}$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \ln(\sqrt{2}+1)$$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Επειδή η $f\,'$ είναι συνεχής και $f\,'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $f\,'$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο , επομένως η f θα είναι γνησίως μονότονη.

β.

Η σχέση $f(x) = -f(2-x)$ για $x = 1$ δίνει $f(1) = -f(1) \Leftrightarrow$

$2f(1) = 0 \Leftrightarrow$

$f(1) = 0$ άρα το 1 είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα θα είναι μοναδική

γ.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ λόγω του (β) ερωτήματος .

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(1) = 1$.

Έχουμε $$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{(x-1)}\right)\cdot\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 1$

Επομένως θα ισχύει $f\,'(1) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$

Αφού επιπλέον η $f\,'$ είναι συνεχής θα ισχύει $\lim\limits_{x\to1} f'(x) = f\,'(1)$

Η (1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = f\,'(1)\cdot\dfrac{1}{f'(1)} = 1$

Δηλαδή $g\,'(1) = 1$